UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

"LE PROBLÈME DE STEINER SUR UN GRAPHE ORIENTÉ : FORMULATIONS ET RELAXATIONS"

par

Danielle Arpin*, Nelson Maculan**
et Sang Nguyen*

Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention du C.R.S.H. (#410-81-0722-RL), à une subvention du fonds F.C.A.C. (#83-AS-0026) ainsi qu'à une bourse de chercheur du Programme de soutien à l'emploi scientifique, Secrétariat à la Science et à la technologie du Gouvernement du Québec.

Ce rapport a été publié grâce à une subvention du fonds F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche.

* Université de Montréal
** Université Fédérale de Rio de Janeiro

Université de Montréal
Centre de recherche sur les transports - Publication #315
Septembre 1984 - révisé en septembre 1985

Dépôt légal - 4e trimestre 1985

RÉSUMÉ

Trois formulations du problème de Steiner sur un graphe orienté sont présentées ainsi que la comparaison des relaxations linéaires associées à ces formulations en vue du choix d'une meilleure borne inférieure du problème de Steiner en question. Une formulation est retenue et on y applique la méthode de Benders illustrée par un exemple ainsi que les résultats de la solution de la relaxation linéaire de cette formulation obtenus par une méthode dy type V.U.B. ("variable upper bounds").

1. INTRODUCTION

Le problème de Steiner sur un graphe (non-orienté), voir GILBERT & POLLAK (1968), HAKIMI (1971) et DREYFUS & WAGNER (1972) est un problème plus connu que celui de Steiner sur un graphe orienté, voir NASTANSKY, SELKOV & STEWART (1974), CLAUS & MACULAN (1983) et WONG (1984). Dans la 2ème section nous présentons la définition du problème de Steiner sur un graphe orienté ainsi que la difficulté du problème. Trois formulations utilisant la programmation linéaire en nombres entiers sont présentées à la 3ème section. La comparaison des relaxations linéaires de ces trois formulations en vue du choix d'une meilleure borne inférieure est réalisée dans la 4ème section. La méthode de Benders est appliquée à la deuxième formulation qui est basée sur un modèle de flots non-simultanés et illustrée par un exemple à la 5ème section, la solution de la relaxation linéaire de cette formulation réalisée par un algorithme du type V.U.B. ("variable upper bounds") et les résultats numériques y concernant sont décrits dans la 6ème section. Finalement les conclusions sont présentées à la 7ème section.

2. Définitions et généralités

Soit $G = (S,A)$ un graphe orienté dont chaque arc $a \in A$ est muni d'une longueur $\ell_a > 0$. L'ensemble S des sommets est partitionné en trois sous-ensembles : $\{s\}$, S_0 et S_f où s est la racine, S_0 l'ensemble des sommets obligatoires et S_f l'ensemble des sommets facultatifs ou points de Steiner.

Le problème de Steiner sur le graphe G orienté consiste à déterminer un sous-graphe partiel de G, $G' = (S',A')$ où $\{s\} \cup S_0 \subseteq S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$, de longueur totale minimale, permettant de relier par un chemin s à chaque sommet de S_0 en utilisant, éventuellement, un ou plusieurs sommets facultatifs.

Pour $\ell_a > 0$, pour tout $a \in A$, G' sera une arborescence de racine s.

Le problème de Steiner sur un graphe orienté, tel comme nous avons défini ci-dessus, est classé comme un problème NP-ardu ("NP-hard").

Nous devons faire deux remarques importantes :

(i) Si $|S_0| = 1$, alors le problème consiste à déterminer le plus court chemin entre s et le seul sommet appartenant à S_0, des algorithmes polynomiaux sont connus pour ce problème;

(ii) Si $S_f = \emptyset$, alors le problème est celui de déterminer l'arborescence minimale de racine s du graphe G, pour lequel il existe au moins un algorithme polynomial (c'est le problème de l'intersection de deux matroides). Voir GONDRAN & MINOUX (1979).

Le problème est "difficile" quand $1 < |S_0| < |S| - 1$, il n'y a pas d'algorithme polynomial connu jusqu'à présent. L'existence d'un algorithme polynomial pour la solution de ce problème impliquait NP = P.

3. Trois formulations

Soient $m = |A|$, $n = |S|$, $n_0 = |S_0|$. À chaque arc $a = (i,j) \in A$ est associée la longueur $\ell_{ij} = \ell_a > 0$.

Soient M_i^+ l'ensemble des sommets successeurs de i et M_i^- l'ensemble des sommets prédécesseurs de i.

Soit $C_\ell = (X_\ell, \bar{X}_\ell) = \{(i,j) \mid i \in X_\ell \text{ et } j \in \bar{X}_\ell\}$ une coupe en G telle que $X_\ell \cup \bar{X}_\ell = S$, $X_\ell \cap \bar{X}_\ell = \emptyset$, $s \in X_\ell$, $S_0 \cap \bar{X}_\ell \neq \emptyset$. Nous pouvons énumérer toutes les coupes: $C_1, C_2, \ldots, C_v$ où v est de l'ordre de 2^{n-1}.

Les variables $y_{ij} \in \{0,1\}$ pour tout $(i,j) \in A$, telles que $y_{ij} = 1$ si l'arc (i,j) appartient à la solution du problème, et $y_{ij} = 0$ dans le cas contraire, seront les variables de décision des trois formulations qui vont suivre.

Sans perte de généralité nous pouvons considérer $M_s^- = \emptyset$, puisque les arcs appartenant à A qui arrivent en s ne feront jamais partie des solutions optimales.

1ère formulation

Nous considérons un problème de flot pour lequel le sommet s offre n_o unités de flot et chaque sommet appartenant à S_o en demande une unité. Ce type de formulation est souvent utilisé dans les problèmes de localisation et aussi dans les problèmes de voyageur de commerce ("Traveling Salesman Problem"), voir GAVISH & GRAVES (1982) ou NOBERT (1982).

Soit x_{ij} le flux dans l'arc (i,j), $(i,j) \in A$.

Problème 1 :

$$z_1 = \text{minimum} \sum_{(i,j)\in A} \ell_{ij} y_{ij} \qquad (1)$$

sous les contraintes

$$\sum_{j\in M_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in M_i^-} x_{ji} = 0 \qquad \text{pour tout } i \in S_f \quad (2)$$

$$\sum_{j\in M_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in M_i^-} x_{ji} = -1 \qquad \text{pour tout } i \in S_o \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq n_o y_{ij} \qquad \text{pour tout } (i,j) \in A \quad (4)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } (i,j) \in A \quad (5)$$

2ème formulation

Cette formulation fut présentée par CLAUS & MACULAN (1983) et par WONG (1984) pour le problème de Steiner sur un graphe et qui est proche de celle présentée par BEASLEY (1982).

Nous considérons un problème de flots non-simultanés. Le sommet s offre une unité de flot à chaque sommet de S_o. Soit x_{ij}^k le flux dans l'arc (i,j), appartenant au flot qui va de s au sommet $k \in S_o$.

Problème 2 :

$$z_2 = \text{minimum} \sum_{(i,j)\in A} \ell_{ij} y_{ij} \qquad (6)$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j\in M_i^+} x_{ij}^k - \sum_{j\in M_i^-} x_{ji}^k = 0 \qquad \text{pour tout } i \in S-\{s,k\} \\ &\sum_{j\in M_k^+} x_{kj}^k - \sum_{j\in M_k^-} x_{jk}^k = -1 \\ &0 \leq x_{ij}^k \leq y_{ij}, \qquad \text{pour tout } (i,j)\in A \\ &y_{ij} \in \{0,1\}, \quad \text{pour tout } (i,j)\in A \end{aligned}\right\} \quad k \in S_o \quad (7) \quad (8)$$

3ème formulation

Cette formulation a été développée par ANEJA (1980), pour un graphe non-orienté.

Problème 3 :

$$z_3 = \text{minimum} \sum_{(i,j)\in A} \ell_{ij} y_{ij} \qquad (9)$$

sous les contraintes

$$\sum_{(i,j)\in C_\ell} y_{ij} \geq 1 \qquad \ell = 1,2,\ldots,v \qquad (10)$$

$$y_{ij} \in \{0,1\}, \quad (i,j)\in A \qquad (11)$$

La 1ère formulation possède n+m-1 contraintes (2), (3) et (4), m variables de flux et m variables 0-1. La 2ème formulation a $n_o(n+m-1)$ contraintes du type (7), $n_o m$ variables de flux et m variables 0-1. Pour la 3ème formulation il y a $v=0(2^{n+1})$ contraintes du type (10) et m variables 0-1.

4. Les relaxations linéaires de ces trois formulations

Quand nous remplaçons $y_{ij}\in\{0,1\}$, $(i,j)\in A$ par $0\leq y_{ij}\leq 1$, $(i,j)\in A$ dans les trois problèmes décrits ci-dessus nous avons trois relaxations linéaires du problème de Steiner sur un graphe orienté et $\bar{z}_1$, $\bar{z}_2$ et $\bar{z}_3$ seront les valeurs prises par z_1, z_2 et z_3 respectivement.

Cette section est basée sur le travail de WONG (1980) pour le problème du voyageur de commerce.

Théorème $\quad \bar{z}_1 \leq \bar{z}_2 \leq \bar{z}_3$

(i) $\bar{z}_1 \leq \bar{z}_2$

Pour démontrer que $\bar{z}_1 \leq \bar{z}_2$ nous remarquons que du problème 2 nous pouvons vérifier que les relations qui vont suivre sont vraies :

$$\sum_{k\in S_o} \Big(\sum_{j\in M_i^+} x_{ij}^k - \sum_{j\in M_i^-} x_{ji}^k \Big) = 0 \quad \text{pour tout } i\in S_f$$

$$\sum_{k\in S_o} \Big(\sum_{j\in M_i^+} x_{ij}^k - \sum_{j\in M_i^-} x_{ji}^k \Big) = -1 \quad \text{pour tout } i\in S_f$$

$$0 \leq \sum_{k \in S_o} x_{ij}^k \leq n_o y_{ij}, \quad \text{pour tout} \quad (i,j) \in A,$$

qui peuvent aussi être écrites :

$$\sum_{j \in M_i^+} \left(\sum_{k \in S_o} x_{ij}^k \right) - \sum_{j \in M_i^-} \left(\sum_{k \in S_o} x_{ji}^k \right) = 0 \qquad \text{pour tout} \qquad i \in S_f \quad (12)$$

$$\sum_{j \in M_i^+} \left(\sum_{k \in S_o} x_{ij}^k \right) - \sum_{j \in M_i^-} \left(\sum_{k \in S_o} x_{ji}^k \right) = -1 \qquad \text{pour tout} \qquad i \in S_o \quad (13)$$

$$0 \leq \sum_{k \in S_o} x_{ij}^k \leq n_o y_{ij} \quad (14)$$

Faisons $x_{ij} = \sum_{k \in S_o} x_{ij}^k$, alors (12), (13) et (14) sont équivalents à (2), (3) et (4) respectivement. Cela veut dire que (2), (3) et (4) sont des combinaisons linéaires des contraintes du problème 2, alors $\bar{z}_1 \leq \bar{z}_2$.

(ii) $\bar{z}_2 = \bar{z}_3$

Pour démontrer que $\bar{z}_2 = \bar{z}_3$ nous allons montrer qu'à chaque solution réalisable du problème 3 relaxé correspond au moins une solution réalisable du problème 2 relaxé et vice versa.

Soit $\bar{y}_{ij}$ pour tout $(i,j) \in A$ une solution réalisable de la relaxation relaxation linéaire du problème 3, cela veut dire :

$$\sum_{(i,j) \in C_\ell} \bar{y}_{ij} \geq 1 \quad , \quad \ell = 1,2,\ldots,v$$

$$0 \leq \bar{y}_{ij} \leq 1 \quad , \quad \text{pour tout} \quad (i,j) \in A$$

Si nous remplaçons y_{ij} par $\bar{y}_{ij}$ pour tout $(i,j) \in A$ dans le problème 2, nous aurons n_o problèmes de flot dont les capacités des arcs seront $\bar{y}_{ij}$. Si pour un $k \in s_o$ nous ne pouvons pas acheminer une unité de flot de la racine 1

au sommet k, il existe une coupe C_ℓ telle que $\sum_{(i,j)\in C_\ell} \bar{y}_{ij} < 1$, qui contredit l'hypothèse de $\bar{y}_{ij}$ satisfaire (10). Alors nous aurons toujours une solution réalisable pour le problème 2 relaxé $(\bar{x}^k_{ij}, \bar{y}_{ij})$, $k\in S_o$ et pour tout $(i,j)\in A$ si $\bar{y}_{ij}$ est une solution du problème 3 relaxé.

Soit $(\bar{x}^k_{ij}, \bar{y}_{ij})$, $k\in S_o$, pour tout $(i,j)\in A$ une solution réalisable de la relaxation linéaire du problème 2, alors toutes les coupes C_ℓ pour chaque problème de flot associé à $k\in S_o$ fourniront $\sum_{(i,j)\in C_\ell} \bar{y}_{ij} > 1$, qui implique que $\bar{y}_{ij}$, pour tout $(i,j)\in A$ est une solution réalisable du problème 3 relaxé. Cela complète la preuve du théorème.

Le résultat de ce théorème nous dit que $\bar{z}_2$ ou $\bar{z}_3$ sera une borne inférieure de $z=z_1=z_2=z_3$, solution optimale du problème de Steiner sur un graphe orienté meilleure que $\bar{z}_1$; puisque

$$\bar{z}_1 \leq \bar{z}_2 \leq z.$$

Nous espérons que l'écart primal-dual $z-\bar{z}_2$ sera petit. Dans le travail de CLAUS & MACULAN (1983) quelques considérations relatives à l'existence des solutions entières de la relaxation du problème 2 sont décrites.

5. Application de la méthode de Benders pour résoudre le problème 2

Nous présentons dans cette section la méthode de BENDERS (1962) pour la solution du problème de programmation en nombres entiers associé à la 2ème formulation.

Prenons $y_{ij} = \bar{y}_{ij} \in \{0,1\}$ pour tout (i,j), où $\bar{y}_{ij}$ est une donnée. Soient u^k_i les variables duales associées aux contraintes de flot et w^k_{ij} celles associées aux contraintes $-x^k_{ij} \geq -\bar{y}_{ij}$, pour tout $(i,j)\in A$.

Le problème dual de (6) - (7) sera :

$$t = \text{maximum} \sum_{k=1}^{n_o} (- u_k^k - \sum_{(i,j)\in A} \bar{y}_{ij} w_{ij}^k)$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{aligned} u_i^k - u_j^k - w_{ij}^k &\leq 0 \quad \text{pour tout } (i,j)\in A,\ i\neq s,\ j\neq s \\ - u_j^k - w_{sj}^k &\leq 0 \quad \text{pour tout } j\in M_s \\ w_{ij}^k &\geq 0 \quad \text{pour tout } (i,j)\in A \end{aligned}\right\} k\in S_o$$

Ce problème est séparable :

Problème k : $t_k = \text{maximum} - u_k^k - \sum_{(i,j)\in A} \bar{y}_{ij} w_{ij}^k$ (15)

$$u_i^k - u_j^k - w_{ij}^k \leq 0 \quad \text{pour tout } (i,j)\in A,\ i\neq s,\ j\neq s \tag{16}$$

$$- u_j^k - w_{sj}^k \leq 0 \quad \text{pour tout } j\in M_s \tag{17}$$

$$w_{ij}^k \geq 0 \quad \text{pour tout } (i,j)\in A \tag{18}$$

et $$t = \sum_{k=1}^{n_o} t_k .$$

Comme (16), (17) et (18) forment un cône polyédrique convexe alors le problème principal de Benders sera :

$$z = \text{minimum} \sum_{(i,j)\in A} \ell_{ij} y_{ij} \tag{19}$$

sous les contraintes

$$r_k^q [- e_k, - y] \leq 0 \qquad k = 1,2,\ldots,n_o \quad q = 1,2,\ldots,p \tag{20}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \text{pour tout } (i,j)\in A \tag{21}$$

où $e_k = (0\ 0\ \ldots\ 0 \underset{\uparrow}{\cdot}\ 1.0\ \ldots\ 0)^T$

ligne correspondant au sommet k

$y = (y_{a_1}\ y_{a_2} \ldots y_{a_m})^T$ $\quad a_i \in A$ et

r_k^q est un rayon extrême de (16), (17) et (18) et p le nombre total des rayons extrêmes du cône en question.

Si pour un $k \in S_o$, le problème (15)-(18) est illimité, alors les capacités $\bar{y}_{ij}$ associées aux arcs $(i,j) \in A$ ne permettent pas qu'une unité de flot puisse aller de s au sommet k.

Considérons une partition de $S = S_1 \cup S_2$, où S_1 est l'ensemble des sommets qui contient s et tous les sommets qui reçoivent une unité de flot provenant de s. Si $k \in S_2$ le problème (15)-(18) est illimité, et si $k \in S_1$, $t_k = 0$.

Nous pouvons remarquer, voir GAVISH & GRAVES (1982), qu'un rayon extrême de (16), (17) et (18) est :

$$u_i^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \in S_1 - \{s\} \\ -1 & \text{si} \quad i \in S_2 \end{cases}$$

$$w_{ij}^k = \left| u_i^k - u_j^k \right| \qquad \text{pour tout} \quad (i,j) \in A,\ i \neq s,\ j \neq s$$

$$w_{sj}^k = u_j^k \qquad \text{pour tout} \quad j \in M_s^+$$

En donnant aux variables u_k^k et w_{ij}^k les valeurs obtenues, la coupe de Benders :

$$- u_k^k - \sum y_{ij} w_{ij}^k \leq 0$$

devient

$$\sum_{(i,j) \in (S_1,S_2)} y_{ij} \geq 1$$

cela implique que (19)-(21) est le problème 3, formulation due à ANEJA (1980), ces coupes sont les mêmes proposées par DANTZIG, FULKERSON &

JOHNSON (1954) pour éviter les sous-tours dans le problème du voyageur de commerce.

Nous allons résoudre le problème maître de Benders (19)-(21) en générant à chaque itération une contrainte (ou une coupe) du type (20).

Pour commencer nous utilisons seulement les coupes simples :

$$\sum_{(i,j)\in(\{s\},\ S-\{s\})} y_{ij} \geq 1 \qquad \text{et}$$

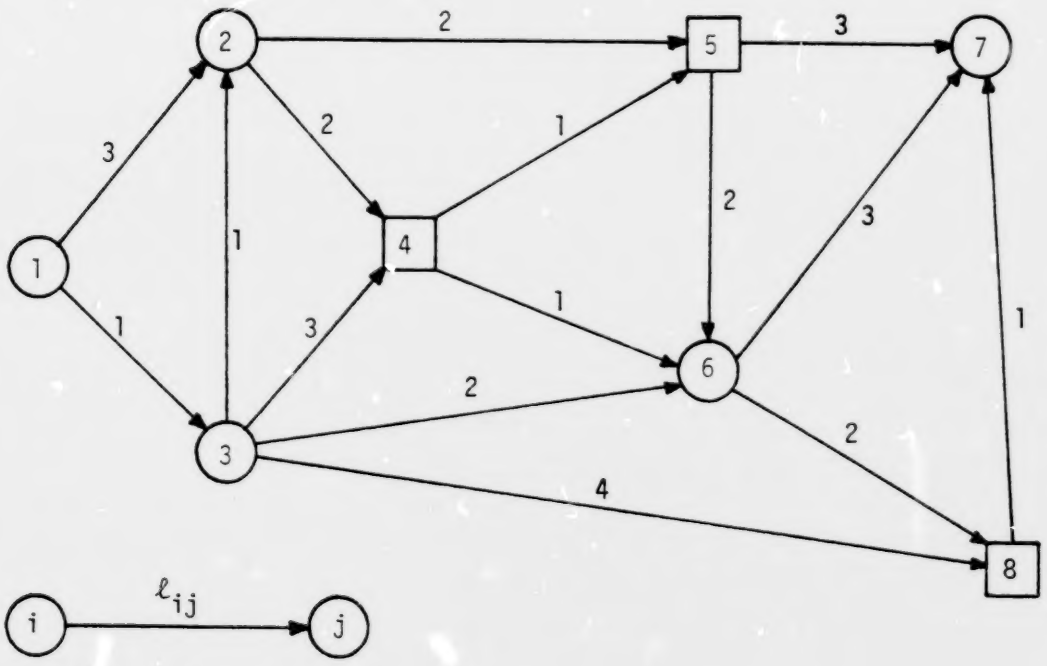
$$\sum_{(i,j)\in(S-\{k\},\{k\})} y_{ij} \geq 1 \qquad k\in S_o$$

le problème de programmation en nombres entiers 0-1 aura $n_o + 1$ contraintes initiales. Soit $\bar{y}_{ij}$ une solution optimale de ce problème, avec cette solution nous allons résoudre les n_o problèmes (15)-(18). Si tous les n_o problèmes possèdent des solutions optimales égales à zéro, alors $\bar{y}_{ij}$ résoud le problème de Steiner que nous sommes en train de traiter. Sinon pour un $k\in S_o$ la solution du problème (15)-(18) est illimitée et une coupe du type $\sum_{(i,j)\in(S_1,\ S_2)} y_{ij} \geq 1$ est ajoutée au problème de programmation en nombres entiers 0-1 et une nouvelle solution $\bar{y}_{ij}$ est trouvée.

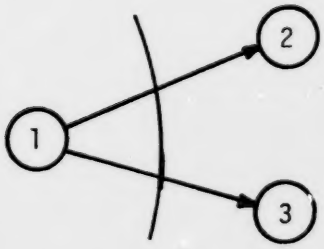
Pour générer les coupes de Benders nous n'allons pas résoudre les n_o problèmes (15)-(18), nous proposons une procédure plus simple.

Etant donné une solution $\bar{y}_{ij}$, nous résolvons pour chaque $k\in S_o$ le problème du flot maximum de la source s au puits k, voir GONDRAN & MINOUX (1979), EVEN (1979). Si pour tous les $k\in S_o$ la valeur du flot est plus grande ou égale à 1, $\bar{y}_{ij}$ est une solution optimale. Sinon il existe une coupe minimale de valeur zéro pour un certain k du type (S_1, S_2) qui génère la nouvelle contrainte à être ajoutée au problème de programmation en nombres entiers 0-1 (problème maître de Benders). Cette méthode est illustrée dans l'exemple numérique suivant.

Exemple $G = \{S, A\}$, $s = 1$, $S = \{1\} \cup S_o \cup S_f$,
$S_o = \{4,5,8\}$, $S_f = \{2,3,6,7,\}$



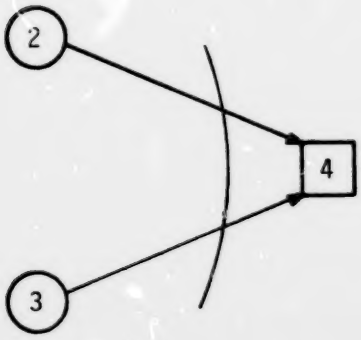
Les premières contraintes ajoutées au problème maître de Benders sont :



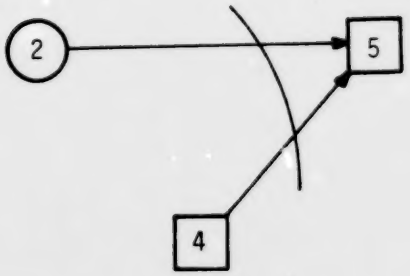
$$y_{12} + y_{13} \geq 1 \qquad \text{(a)}$$

de type $\sum_{(i,j)\in(\{s\},S-\{s\})} y_{ij} \geq 1.$

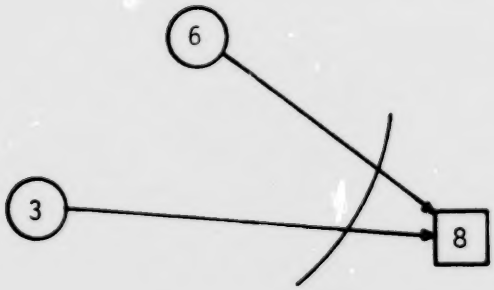
Les contraintes suivantes sont de type $\sum_{(i.j)\in(S-\{k\},k)} y_{ij} \geq 1$, pour $k \in S_o$:



$$y_{24} + y_{34} \geq 1 \qquad \text{(b)}$$



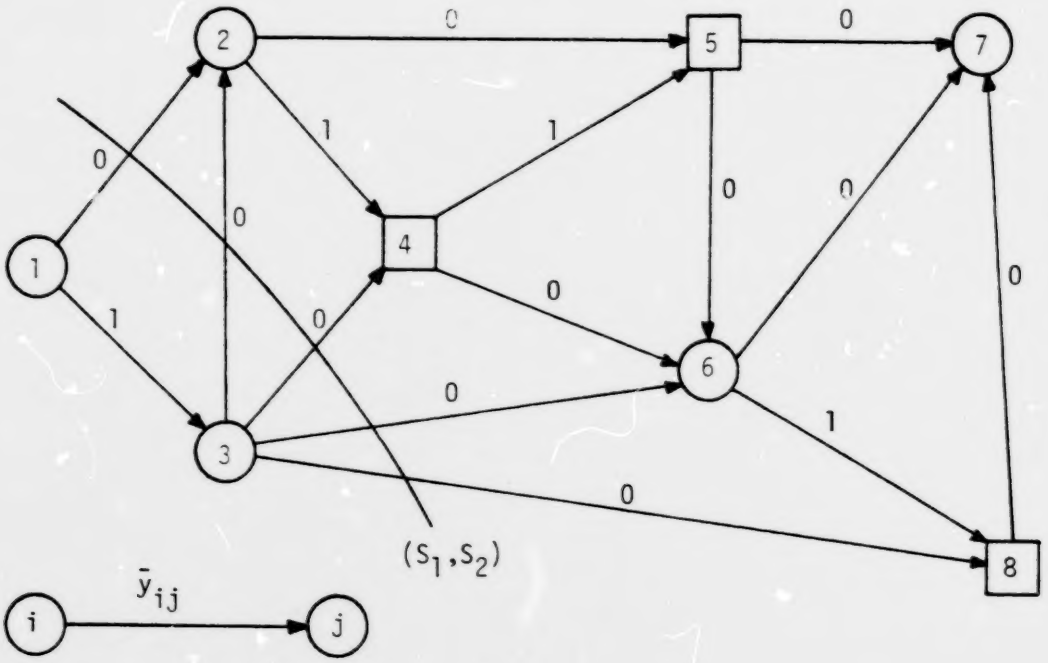
$$y_{25} + y_{45} \geq 1 \qquad \text{(c)}$$



$$y_{38} + y_{68} \geq 1 \qquad \text{(d)}$$

La solution du problème maître de Benders associé aux contraintes (a)-(d) est : $\bar{y}_{13} = \bar{y}_{24} = \bar{y}_{45} = y_{68} = 1$ les autres $\bar{y}_{ij} = 0$

Pour le réseau ci-dessous, dont les capacités des arcs sont les $\bar{y}_{ij}$ ainsi obtenues, nous allons déterminer le flot maximum de 1 à 4, de 1 à 5 et de 1 à 8.



Problème k=4 le flot maximum est nul et on obtient la coupe :

$$(S_1,S_2) = \{(1,2),(3,2),(3,4),(3,6),(3,8)\},$$

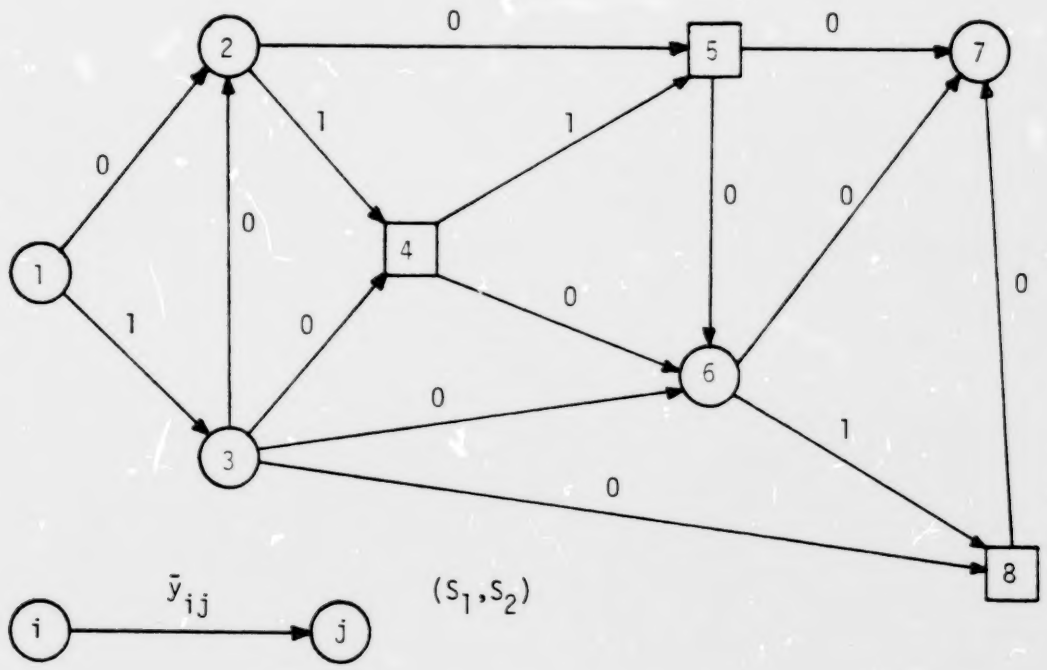
donnant la nouvelle contrainte :

$$y_{12} + y_{32} + y_{34} + y_{36} + y_{38} \geq 1 \qquad \text{(e)}$$

La résolution des problèmes k=5 et k=8 donne la même solution (flots maxima nuls) et la contrainte générée est (e).

La solution du problème maître de Benders associé aux contraintes (a)-(e) est :

$\bar{y}_{13} = \bar{y}_{24} = \bar{y}_{32} = \bar{y}_{45} = \bar{y}_{68} = 1$, les autres $\bar{y}_{ij} = 0$, alors le réseau devient :



Problèmes k = 4 et 5 : flots maximum égaux à 1

Problème k = 8 : le flot maximum est nul et on obtient la coupe :

$$(S_1,S_2) = \{(3,8),(3,6),(4,6),(5,6),(5,7)\},$$

donnant la nouvelle contrainte :

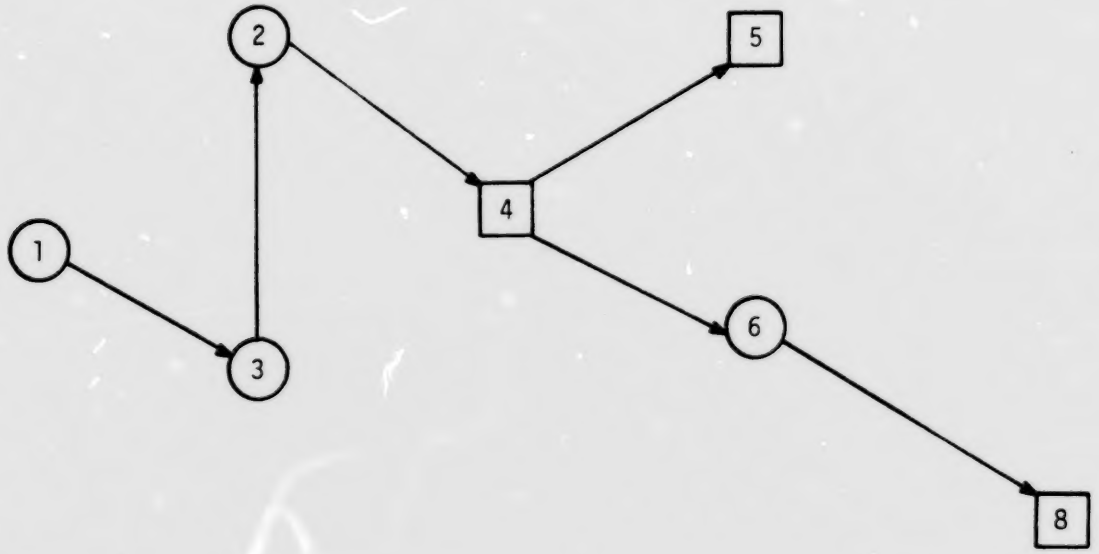
$$y_{38} + y_{36} + y_{46} + y_{56} + y_{57} \geq 1 \qquad \text{(f)}.$$

La solution du problème maître de Benders associé aux contraintes (a)-(f) est finalement :

$$\bar{y}_{13} = \bar{y}_{24} = \bar{y}_{32} = \bar{y}_{45} = \bar{y}_{68} = \bar{y}_{46} = 1, \qquad \text{les autres } y_{ij} = 0.$$

Les problèmes k = 4,5 et 8 possèdent des flots maximum égaux à 1, alors cette dernière solution est optimale.

L'arborescence de Steiner est donc :



Les sommets 2,3 et 6 sont les points de Steiner.

Pour ce qui concerne la solution du problème maître de Benders qui est un problème de recouvrement (set-covering problem) nous pouvons utiliser les idées de ANEJA (1980), les troncatures disjonctives, appliquées aux problèmes de partitionnement et recouvrement, voir CAMPELLO & MACULAN (1983) et CAMPELLO (1983), de manière plus spécifique.

6. Résolution de la relaxation linéaire de la 2ème formulation

Les contraintes du type $x_{ij}^k \leq y_{ij}$ sont du type V.U.B. ("variable upper bounds"), voir SCHRAGE (1975) et SCHRAGE (1978). Un programme écrit en langage FORTRAN fut développé, voir ARPIN (1984) pour résoudre la relaxation linéaire de la 2ème formulation par la méthode du simplexe avec les contraintes V.U.B. et pour laquelle une solution de base réalisable est fournie initialement.

Ci-dessous nous listons les résultats des expériences numériques obtenus pour les problèmes de taille moyenne.

Nombre de problèmes	Noeuds	Arcs	Sommets obligatoires	Temps(moyen) secondes sur CYBER 835/855	Ecart type
10	10	20	5	1.03	1.03
10	20	30	5	1.26	1.26
10	20	30	8	2.54	1.73
10	20	40	5	3.18	2.02
10	20	40	10	8.91	3.09
10	30	40	5	0.86	1.26
10	30	50	5	2.93	1.80
10	40	50	5	1.25	1.22

Pour tous ces 80 problèmes générés aléatoirement nous avons eu des solutions entières.

7. Conclusion

Nous avons présenté trois formulations du problème de Steiner sur un graphe orienté, nous avons aussi pu démontrer que la 2ème formulation fournit une borne inférieure plus intéressante que la 1ère formulation. En

appliquant la méthode de Benders au problème 2 nous avons trouvé en même temps une nouvelle manière de résoudre le problème 3.

Nous avons résolu quelques problèmes de taille moyenne (jusqu'à 40 sommets) liés à la relaxation linéaire de la 2ème formulation et pour tous ces exemples nous avons obtenu des valeurs entières pour y_{ij}.

RÉFÉRENCES

[1] ANEJA, Y.P. (1980), "An Integer Linear Programming Apporach to the Steiner Problem in Graphs". Networks, Vol.10, pp.167-178.

[2] ARPIN, D. (1984), Thèse de Maîtrise, Dépt. IRO, Université de Montréal.

[3] BEASLEY, J.E. (1982) - "An Algorithm for the Steiner Problem in Graphs". Department of Management Science, Imperial College, London, SW7 2BX, England.

[4] CAMPELLO, R.E. (1983), "Accelerated Eudideau Algorithm's Behaviour on Solving High-density Equality-constrained Set Covering Problems". W.P. #62-82-83, G.S.I.A., Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA 15213.

[5] CAMPELLO, R.E. & MACULAN, N. (1983), "On Deep Disjunctive Cutting Planes for Set Partitioning : A Computationally Oriented Research". Proceedings of the Mathematical Programming Congress, North-Holland, éditeurs RR. Cottle, B. Konte et M. Kelmauson, Amsterdam.

[6] CLAUS, A. & MACULAN, N. (1983), "Une nouvelle foumulation du problème de Steiner sur un graphe". publication #280, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

[7] DANTZIG, G.C., FULKERSON, D.R. & JOHNSON, H.N. (1954), "Solutions of a Large Scale Traveling Salesman Problem". Operations Research, Vol. 2, pp. 393-410.

[8] DREYFUS, S.E. & WAGNER, R.A. (1972), "The Steiner Problem in Graphs". Networks 1, pp. 195-207.

[9] EVEN, S. (1979), "Graph Algorithms". Computer Science Press, Potomac, Maryland 20854.

[10] GAVISH, B. & GRAVES, S.C. (1982), "Scheduling and Routing in Transportation Systems : Formulations and New Relaxations". Graduate School of Management, University of Rochester, Rochester NY 14627.

[11] GILBERT, E.N. & POLLAK, H.O. (1968), "Steiner Minimal Trees", SIAM Journal for Applied Mathematics. Vol. 16, N. 1, pp. 1-29.

[12] GONDRAN, M. & MINOUX, M. (1979), "Graphes et algorithmes". Eyroller, Paris.

[13] HAKIMI, S.L. (1971), "Steiner's Problem in Graphs and its Implications". Network 1, pp. 113-133.

[14] NOBERT, Y. (1982), "Construction d'algorithmes optimaux pour des extensions au problème du voyageur de commerce". thèse de Ph.D., publication #297, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

[15] SCHRAGE, L. (1975), "Implicit Representation of Variable Upper Bound in Linear Programming". Mathematical Programming Study 4, pp.118-132.

[16] SCHRAGE, L. (1978), "Implicit Representation of Generalized Variable Upper Bounds in Linear Programming". Mathematical Programming, Vol. 14, pp. 11-20.

[17] WONG, R.T. (1980), "Integer Programming Formulations of the Traveling Salesman Problem". Proceedings of the IEEE International Conference of Circuits and Computer. October 1980, pp. 149-152.

[18] WONG, R. (1984), "A Dual Ascent Approach for the Steiner Tree Problems on a Directed Graph". Mathematical Programming, vol. 28, no. 2, pp. 271-287.